Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Primul test de selecţie pentru juniori
Neptun – Mangalia, 15 aprilie 2009

Problema 1. Pentru fiecare număr natural nenul n notăm $a_n = 2\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ ori}}$, unde cifra 3 apare de exact n ori. Să se arate că numărul a_{2009} are o infinitate de multipli în mulţimea $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un romb şi fie punctele M şi N pe segmentele AC, respectiv BC, $N \neq B$ astfel încât $DM = MN$. Fie P punctul de intersecţie al dreptelor AC şi DN şi fie R punctul de intersecţie al dreptelor AB şi DM. Să se arate că $RP = PD$.

Problema 3. Fie A o mulţime finită de numere reale strict pozitive cu proprietatea că:

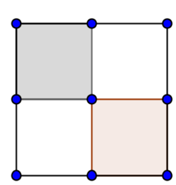
Pentru orice număr real $a > 0$, mulţimile

$$\{x \in A \mid x > a\} \qquad \text{şi} \qquad \left\{x \in A \mid x < \frac{1}{a}\right\}$$

au cardinalele de aceeaşi paritate.

Să se arate că produsul elementelor mulţimii A este egal cu 1.

Problema 4. Pentru a desena un pătrat $\mathcal{P}$ de latură 2 cm împărţit în pătrate de latură 1 cm este suficient să desenăm trei pătrate: $\mathcal{P}$ şi două pătrate de latură 1 cm, aşezate în colţuri opuse ale lui $\mathcal{P}$.



Care este numărul minim de pătrate necesar pentru a desena un pătrat de latură n cm ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) împărţit în n^2 pătrate de latură 1 cm?

Timp de lucru 4 ore
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte